2) a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x+2}{x(x+1)}$. **b)** Dresser le tableau de variation de *f*.

c) Montrer que *f* réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle *J* que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans *IR* l'équation $x^2 = x+1$.

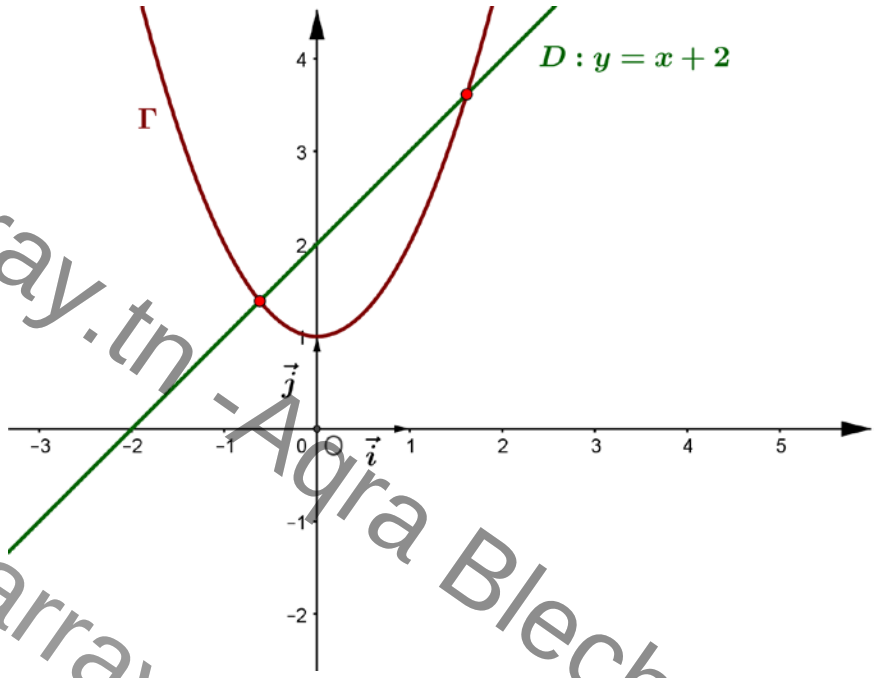
b) On note α la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à $-\dfrac{1}{\alpha}$.

c) Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses au point *A* d'abscisse α.

d) Montrer qu'une équation de la tangente *T* à (C_f) au point *A* est $y=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) Vérifier que la tangente *T* passe par le point $B\left(0,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

4) Dans la figure ci-dessous, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite *D* d'équation $y=x+2$ et la courbe Γ de la fonction $x \mapsto x^2+1$.



a) Construire les points A et *B*. **b)** Construire la tangente *T* et tracer la courbe (C_f).

B) Soit *n* un entier naturel non nul. On pose pour tout $x \geq 1$, $G_n(x)=\int_1^x f(t^n)dt$.

1) a) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $G_n(x)=x f(x^n)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)-n(x-1)-\int_1^x \dfrac{n}{1+t^n}\,dt$.

2) On pose $J_n = n\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \dfrac{1}{1+t^n}dt$. **a)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$

b) En utilisant **B)1°)a)** , Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)=0$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha)$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn
Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn